

Série d'exercices n°1 — Mathématiques

L'ensemble $\mathbb{N}$ et notions d'arithmétique

Tronc commun scientifique · 15 exercices

Renvois du cahier de textes. ex. 1 à 4 — Activité 1 : les nombres pairs et les nombres impairs · ex. 5 et 6 — Propriétés de la parité : somme, produit et carré de deux entiers · ex. 7 et 8 — Multiples d'un entier naturel · ex. 9 à 11 — Diviseurs d'un entier naturel · ex. 12 et 13 — Nombres premiers · ex. 14 à 16 — Applications : PGCD et PPCM à partir de la décomposition ; simplification d...

1. Parmi les nombres 0 ; -3 ; $\frac{5}{2}$; $\sqrt{9}$; 7 ; $\frac{12}{4}$, lesquels appartiennent à $\mathbb{N}$? Écrire la réponse à l'aide des symboles $\in$ et $\notin$.

Réponse. $0 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{9} = 3 \in \mathbb{N}$, $7 \in \mathbb{N}$, $12/4 = 3 \in \mathbb{N}$; $-3 \notin \mathbb{N}$ et $5/2 \notin \mathbb{N}$.

2. Écrire chacun des nombres 24 ; 37 ; 100 ; 111 sous la forme $2k$ ou $2k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Réponse. $24 = 2 \times 12$; $37 = 2 \times 18 + 1$; $100 = 2 \times 50$; $111 = 2 \times 55 + 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Préciser, en justifiant, la parité de $2n$, $2n + 1$, $2n + 2$ et $4n + 3$.

Réponse. $2n$ et $2n + 2$ sont pairs ; $2n + 1$ et $4n + 3 = 2(2n+1) + 1$ sont impairs.

4. Montrer que la somme de deux entiers pairs est paire, et que la somme d'un entier pair et d'un entier impair est impaire.

Réponse. $2k + 2k' = 2(k + k')$; $2k + (2k' + 1) = 2(k + k') + 1$.

5. Montrer que le produit de deux entiers impairs est impair.

Réponse. $(2k+1)(2k'+1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(2kk' + k + k') + 1$.

6. Écrire l'ensemble des multiples de 6 strictement inférieurs à 60, puis déterminer PPCM(6 ; 8).

Réponse. $\{0 ; 6 ; 12 ; 18 ; 24 ; 30 ; 36 ; 42 ; 48 ; 54\}$; PPCM(6 ; 8) = 24.

7. Deux feux clignent, l'un toutes les 12 secondes, l'autre toutes les 18 secondes. Ils clignent ensemble à un instant donné : au bout de combien de temps clignoteront-ils de nouveau ensemble ?

Réponse. PPCM(12 ; 18) = 36 : au bout de 36 secondes.

8. Déterminer tous les diviseurs de 48, puis tous ceux de 60. En déduire PGCD(48 ; 60).

Réponse. $D(48) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$; $D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$; PGCD = 12.

9. Parmi 2 340 ; 1 275 ; 4 002 ; 3 555, indiquer ceux qui sont divisibles par 2, par 3, par 5 et par 9.

Réponse. 2 340 : 2, 3, 5, 9. — 1 275 : 3, 5. — 4 002 : 2, 3. — 3 555 : 3, 5, 9.

10. On dispose de 84 stylos et de 126 cahiers à répartir en lots identiques, sans reste. Quel est le nombre maximal de lots ? Que contient alors un lot ?

Réponse. PGCD(84 ; 126) = 42 lots, contenant chacun 2 stylos et 3 cahiers.

11. Dresser la liste des nombres premiers inférieurs à 50 à l'aide du crible d'Ératosthène.

Réponse. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

12. Décomposer en produit de facteurs premiers : 180 ; 252 ; 1 000 ; 693.

Réponse. $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$; $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$; $1\,000 = 2^3 \times 5^3$; $693 = 3^2 \times 7 \times 11$.

13. À l'aide des décompositions, calculer PGCD(180 ; 252) et PPCM(180 ; 252). Vérifier que leur produit est égal à 180×252 .

Réponse. PGCD = $2^2 \times 3^2 = 36$; PPCM = $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1\,260$; $36 \times 1\,260 = 45\,360 = 180 \times 252$.

14. Rendre irréductibles les fractions $\frac{180}{252}$, $\frac{126}{84}$ et $\frac{1000}{625}$.

Réponse. $5/7$; $3/2$; $8/5$.

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $n^2 + n$ est pair. En déduire la parité de $n^2 + n + 3$.

Réponse. $n^2 + n = n(n+1)$, produit de deux entiers consécutifs, donc pair ; $n^2 + n + 3$ est donc impair.