

Série d'exercices n°1 — Mathématiques

Notions de logique

1^{re} année bac sciences expérimentales · 17 exercices

Renvois du cahier de textes. ex. 1 et 2 — Proposition ; valeur de vérité · ex. 3 et 4 — Opérations sur les propositions : négation, conjonction (et), disjonction (ou) · ex. 5 et 6 — L'implication et l'équivalence · ex. 7 et 8 — Fonctions propositionnelles · ex. 9 et 10 — Négation d'une proposition quantifiée · ex. 11 — Le raisonnement par disjonction des cas · ex. 12 — Le raisonnement par contraposée · ex. 13 et 14 — Le raisonnement par l'absurde · ex. 15 à 17 — Le raisonnement par récurrence : principe et mise en œuvre

1. Parmi les phrases suivantes, indiquer celles qui sont des propositions et donner leur valeur de vérité : (a) $3 + 4 = 8$; (b) « $x^2 \geq 0$ » ; (c) Rabat est la capitale du Maroc ; (d) 5 est un nombre premier.

Réponse. (a) proposition fausse ; (b) ce n'est pas une proposition (la valeur dépend de x) ; (c) et (d) propositions vraies.

2. Donner la valeur de vérité de : (a) $\sqrt{16} \in \mathbb{N}$; (b) $-2 \in \mathbb{N}$; (c) $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 + 1 > 0$; (d) $0,5 \in \mathbb{D}$.

Réponse. vraie ; fausse ; vraie ; vraie.

3. Écrire la négation de : (a) « $3 < 5$ » ; (b) « $x \in [0 ; 1]$ » ; (c) « n est pair » ; (d) « $a = 0$ et $b = 0$ ».

Réponse. $3 \geq 5$; $x \notin [0 ; 1]$; n est impair ; $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

4. Soient p : « 2 est pair » et q : « 3 est pair ». Donner la valeur de vérité de p et q , p ou q , non p , non q .

Réponse. faux ; vrai ; faux ; vrai.

5. Dresser la table de vérité de $(p \implies q)$ et de $((\text{non } p) \text{ ou } q)$, puis conclure.

Réponse. Les deux colonnes coïncident : $p \implies q$ équivaut à $(\text{non } p) \text{ ou } q$.

6. Donner la valeur de vérité de l'implication « si n est un multiple de 4 alors n est pair », puis énoncer sa réciproque et dire si elle est vraie.

Réponse. L'implication est vraie ; la réciproque « si n est pair alors n est multiple de 4 » est fausse ($n = 6$).

7. Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la fonction propositionnelle $P(x)$: $x^2 - 3x + 2 = 0$ est vraie.

Réponse. $\{1 ; 2\}$.

8. Donner la valeur de vérité de : (a) $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 > 0$; (b) $(\exists x \in \mathbb{R}) x^2 = 2$; (c) $(\forall n \in \mathbb{N}) n + 1 > n$; (d) $(\exists x \in \mathbb{Q}) x^2 = 3$.

Réponse. (a) fausse ($x = 0$) ; (b) vraie ; (c) vraie ; (d) fausse, car $\sqrt{3}$ est irrationnel.

9. Écrire la négation de : (a) $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \geq x$; (b) $(\exists n \in \mathbb{N}) n^2 = 10$; (c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x + y = 1$.

Réponse. $(\exists x \in \mathbb{R}) x^2 < x$; $(\forall n \in \mathbb{N}) n^2 \neq 10$; $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x + y \neq 1$.

10. Comparer les propositions $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : y > x$ et $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : y > x$. Donner la valeur de vérité de chacune.

Réponse. La première est vraie (prendre $y = x + 1$) ; la seconde est fausse : aucun réel n'est supérieur à tous les autres. L'ordre des quantificateurs compte.

11. Montrer, en distinguant les cas selon la parité de n , que $n(n + 1)$ est pair pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Réponse. Si $n = 2k$, le produit est pair ; si $n = 2k + 1$, alors $n + 1 = 2(k + 1)$ est pair.

12. Montrer par contraposée que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est impair alors n est impair.

Réponse. Contraposée : $n \text{ pair} \implies n^2 \text{ pair}$. $n = 2k$ donne $n^2 = 2(2k^2)$.

13. Montrer par l'absurde que $\sqrt{3}$ est irrationnel (on admet que si 3 divise n^2 , alors 3 divise n).

Réponse. Si $\sqrt{3} = p/q$ irréductible, alors $p^2 = 3q^2$, donc 3 divise p , puis $p = 3k$ et $q^2 = 3k^2$: 3 divise aussi q , contradiction.

14. Soient $a \in \mathbb{Q}^*$ et b un irrationnel. Montrer par l'absurde que ab est irrationnel.

Réponse. Si $ab = r \in \mathbb{Q}$, alors $b = r/a \in \mathbb{Q}$ puisque $a \neq 0$: contradiction.

15. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Réponse. $n = 1$: les deux membres valent 1. Hérédité : $n(n+1)/2 + (n+1) = (n+1)(n+2)/2$.

16. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $3^n \geq 2n + 1$.

Réponse. $n = 0$: $1 \geq 1$. Hérédité : $3^{n+1} \geq 3(2n+1) = 6n + 3 \geq 2n + 3 = 2(n+1) + 1$.

17. Résoudre par équivalences successives l'équation $\sqrt{x+1} = x - 1$.

Réponse. Condition $x \geq 1$; en élevant au carré : $x^2 - 3x = 0$, de racines 0 et 3. Seul 3 convient : $S = \{3\}$.